

## Reduksi Dimensi pada Optimasi Portofolio *Mean-Variance* Menggunakan *Non-Negative Principal Component Analysis*

Elvina Oktavia<sup>1</sup>, Deni Saepudin<sup>2</sup>, Aniq Atiqi Rohmawati<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Fakultas Informatika, Universitas Telkom, Bandung

<sup>1</sup>elvinaokt@students.telkomuniversity.ac.id, <sup>2</sup>dns@telkomuniversity.ac.id, <sup>3</sup>aniqatiqi@telkomuniversity.ac.id

---

### Abstrak

Optimasi portofolio *mean variance* merupakan suatu metode dasar untuk menentukan alokasi investasi yang optimal ke berbagai saham. Implementasi metode reduksi dimensi *Non-negative Principal Component Analysis* sebagai alat pra-pemrosesan pada optimasi portofolio *mean-variance*, menghasilkan *expected return* sebesar 0,107% dan *variance* 0,020%, lebih baik dibanding menggunakan metode reduksi dimensi *Principal Component Analysis* yang menghasilkan *expected return* 0,103% dan *variance* 0,019% dan optimasi portofolio tanpa reduksi dimensi yang menghasilkan *expected return* 0,095% dan *variance* 0,010%.

---

### Abstract

Mean-variance portfolio optimization is a basic method to determine the optimal allocation of investments to various stocks. Implementation of the Non-negative Principal Component Analysis dimension reduction method as a pre-processing tool in portfolio optimization mean-variance, with expected return of 0.107% and variance 0.020%, shows better results compared to portfolio optimization methods using Principal Component Analysis with expected return 0.103% and variance 0.019% and portfolio optimization without dimension reduction with result expected return 0.095% and variance of 0.010%.

---

## 1. Pendahuluan

### Latar Belakang

Portofolio merupakan sekumpulan aset yang dimiliki oleh seorang atau sekelompok untuk tujuan ekonomis tertentu. Pada dasarnya, portofolio berkaitan dengan bagaimana mengalokasikan sejumlah saham menjadi berbagai jenis investasi (diversifikasi) yang menghasilkan keuntungan maksimal, dengan membuat diversifikasi investor dapat mengurangi risiko dan memaksimalkan *expected return*. Untuk membuat keputusan dalam mengalokasikan investasi portofolio diperlukan analisis kuantitatif<sup>[1]</sup>, salah satunya dengan menggunakan model optimasi portofolio *mean-variance*.

Optimasi portofolio *mean-variance* menggunakan data *multivariate time series* sebagai masukan. Korelasi antar data *time series* memberikan peluang untuk mereduksi data ke representasi yang lebih sederhana tanpa kehilangan informasi yang substantial<sup>[5]</sup>. Reduksi dimensi dalam model *mean-variance* secara langsung mengatasi masalah kompleks dari konstruksi portofolio skala besar. Diharapkan dengan pengurangan dimensi untuk optimasi portofolio dapat meningkatkan kinerja portofolio secara keseluruhan dengan memberikan "karakteristik *risk* dan *return* yang lebih baik"<sup>[6]</sup>.

Salah satu metode reduksi dimensi adalah *principal component analysis* (PCA). Pada hasil transformasi, PCA mempertahankan *variance* maksimum yang menggambarkan sebagian besar karakter dari dataset asli, dengan merepresentasikan ke dimensi yang lebih sederhana<sup>[2]</sup>. Hanya saja eigen vector pada PCA memiliki nilai negatif sehingga dapat mengaburkan hasil transformasi. Dengan menggunakan model *non-negative principal component analysis* (N-PCA)<sup>[1]</sup>, untuk mereduksi dimensi pada masukan optimasi portofolio *mean-variance*, diharapkan hasil yang diperoleh menjadi lebih baik.

### Topik dan Batasannya

Topik pada Tugas Akhir ini yaitu implementasi metode reduksi dimensi *non-negative principal component analysis* pada optimasi portofolio *mean-variance*. Membandingkan hasil metode reduksi dimensi menggunakan model *non-negative principal component analysis* dengan model *principal component analysis* pada optimasi portofolio *mean-variance*, serta membandingkan dengan optimasi portofolio *mean-variance* tanpa reduksi dimensi.

Batasan yang digunakan dalam topik ini adalah, saham yang digunakan adalah saham tetap yang terdaftar pada perhitungan Indeks LQ45 periode Februari-Juli 2018. Saham merupakan saham yang aktif sejak tahun 2008. Data yang digunakan adalah data historis harian selama 10 tahun (Januari 2009-Januari 2019).

**Tujuan**

Tujuan pada Tugas Akhir ini adalah mengimplementasikan metode reduksi *non-negative principal component analysis* dan *principal component analysis* pada optimasi portofolio *mean-variance*, membandingkan hasil optimasi portofolio dengan menggunakan reduksi dimensi dan tanpa reduksi dimensi.

**2. Studi Terkait**

**2.1 Mean-Variance Portofolio**

*Mean-variance* portofolio merupakan teori optimasi yang dikemukakan oleh Harry Max Markowitz. Dalam teorinya Markowitz menggunakan *variance* keuntungan sebagai risiko investasi. Suatu portofolio dikategorikan sebagai portofolio yang efisien apabila memiliki *variance* minimal dengan *expected return* maksimal<sup>[3]</sup>. Beberapa cara yang dilakukan untuk menentukan portofolio menurut model Markowitz yaitu :

- a. Menghitung Return dan *expected return* tiap saham dengan rumus:

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} \tag{1}$$

keterangan :

$R_{it}$  : nilai return saham pada waktu t

$P_{it}$  : harga saham pada waktu t

*Expected return* pada setiap saham, dicari menggunakan rumus :

$$E[R_i] = \sum_{t=1}^T R_{it} \tag{2}$$

*Expected return* dapat dituliskan dengan matriks,

(S) Covariansi return dalam matriks  $C \times C$  :

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

- b. Untuk mencari bobot yang meminimumkan *variance* menggunakan rumus :

$$u = \frac{1}{C^{-1} \mathbf{1}} \tag{5}$$

dimana  $u$  merupakan matriks,

$$\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1], \tag{6}$$

dan  $C^{-1}$  adalah inverse covariansi matriks return.

Bobot pada portofolio dapat dituliskan dengan matriks :

$$w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]. \tag{7}$$

- c. *Expected return* pada portofolio dapat dicari menggunakan rumus :

$$E[R_p] = w^T E[R]. \tag{8}$$

- d. *Variance* portofolio dapat dicari menggunakan rumus

$$\sigma^2 = w^T C w. \tag{9}$$

**2.2 Non-Negative Pricipal Component Analysis**

*Principial components analysis* (PCA) adalah metode reduksi dimensi dari suatu kumpulan data dengan tetap mempertahankan sebanyak mungkin *variance*. Hasil transformasi PCA adalah seperangkat vektor eigen ortogonal baru yang mendefinisikan sistem koordinat baru yang tidak berkorelasi.

Model optimisasi dalam mendefinisikan PCA dan menemukan vektor eigen optimal untuk memaksimalkan *variance* :

$$\max v^T Q v, \text{ dengan } v^T v = 1$$

keterangan :

$v$  : vektor eigen

$$(10)$$

$Q$  : matriks covariance data saham dalam windows.

Solusi untuk model ini  $v_1$  \* adalah vektor eigen yang dinormalisasi sesuai dengan nilai eigen terbesar dan *principal components* pertama dari  $Q$ . Dalam PCA, *principal components* (Pcs) pertama selalu merupakan komponen yang mewakili *variance* terbesar. PC yang kedua tidak berkorelasi dengan yang pertama dan *varianceny*a adalah yang terbesar kedua di antara semua *variance* dari semua komponen.

Walaupun PCA memiliki banyak aplikasi dan sifat menguntungkan seperti ortogonalitas; hasilnya tidak interpretable karena tanda-tanda campuran dari nilai-nilai kombinasi linear. Menambahkan batasan non-negatif pada model PCA di persamaan. (10) membangun model NPCA dalam persamaan.(11), yang bertujuan untuk memecahkan masalah non-convex dan NP-hard<sup>[7]</sup> :

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij} = 1 \quad x_{ij} \geq 0.$$

(11)

**2.3 Statistical Variance Procedure**

Metode integrasi dalam penelitian ini menggunakan *Statistical Variance Procedure* (SVP) sebagai metode pembobotan objektif untuk menggabungkan nilai yang tereduksi dari dimensi baru dan untuk mewakilinya dengan nilai tunggal. SVP menetapkan bobot untuk setiap dimensi menggunakan *variance* pengamatan dan *variance* yang dijelaskan dari dimensi yang direduksi sebagaimana didefinisikan dalam persamaan<sup>[4]</sup> :

$$w_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n x_{ijk}^2 - \bar{x}_{ij}^2}{\sum_{k=1}^n x_{ijk}^2} \tag{12}$$

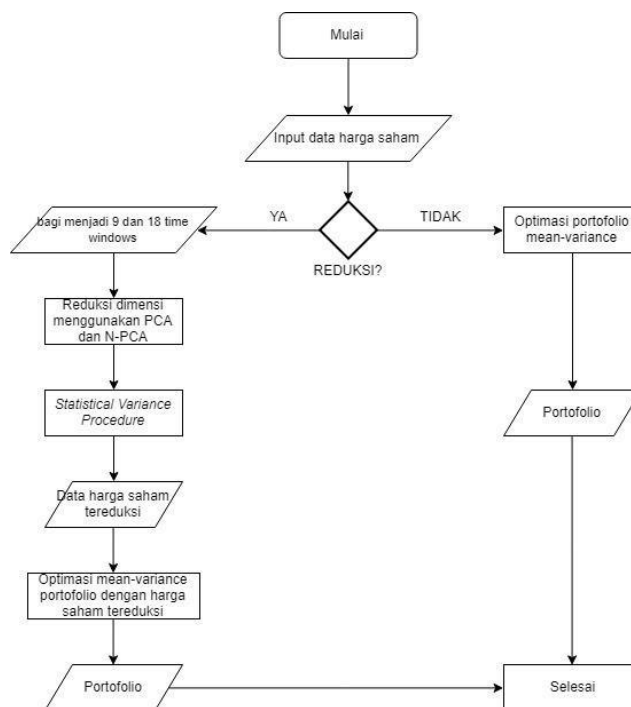
$$\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1 \tag{13}$$

keterangan :

- ◆◆◆ : nilai dari data yang telah direduksi
- ◆◆ : variance dari dimensi yang telah direduksi
- ◆ : bobot objektif dari dimensi yang telah di reduksi.

**3. Sistem yang Dibangun**

Pada Tugas Akhir ini, sistem yang dibangun bertujuan untuk menghasilkan Portofolio optimal dari saham-saham indeks LQ45 menggunakan reduksi dimensi dan tanpa reduksi dimensi.



**Gambar 1 Flowchart umum, optimasi portofolio mean variance**

Keterangan :

1. Input data harga saham

Data yang digunakan sebagai masukan optimasi portofolio *mean-variance* adalah data historis harian saham-saham indeks LQ45 dalam jangka waktu 10 tahun (2009-2019) sebanyak 35 aset dan 2.448 observasi.

**Table 1 Dataset harga saham Indeks LQ45**

Date	ADHI.JK	ADRO.JK	AKRA.JK	ANTM.JK	ASII.JK	...	WIKA.JK
1/5/2009	254.54	520	690	1033.17	1220	...	208.367
1/7/2009	254.54	520	680	1033.17	1350	...	208.367
1/8/2009	254.54	500	680	974.373	1295	...	208.367
1/9/2009	263.025	510	680	1049.97	1245	...	208.367
...	...	...	...	...	...	...	...
1/1/2019	1585	1215	4290	765	8225	...	1655

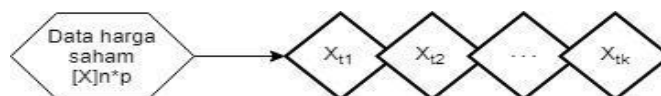
Sumber : <https://finance.yahoo.com>

Saham-saham yang digunakan yaitu :

**Tabel 2 Daftar saham LQ45 yang digunakan**

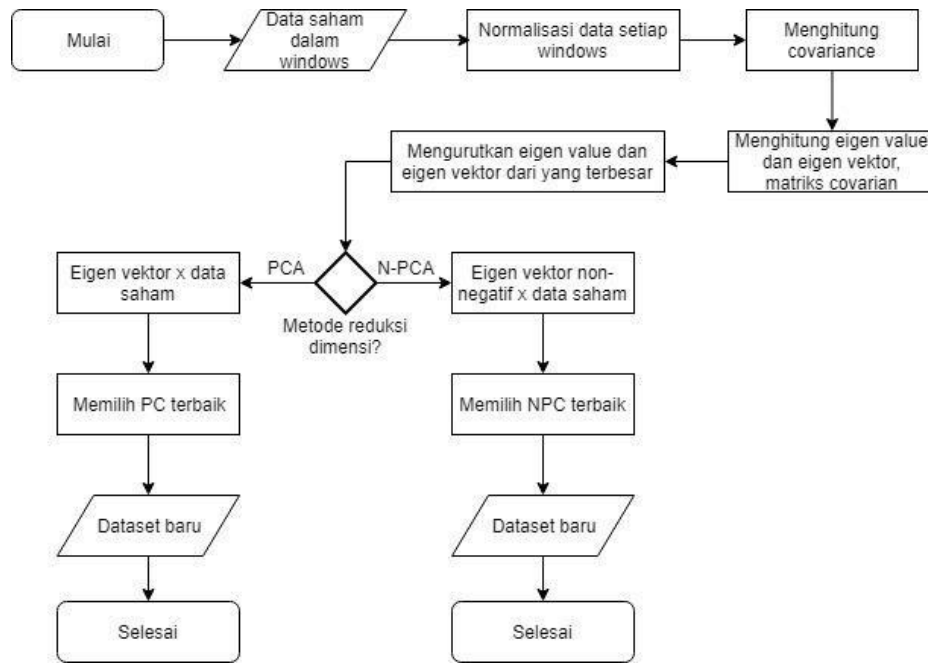
Kode	Nama Saham	Kode	Nama Saham
ADHI.JK	Adhi Karya (Persero) Tbk.	INDF.JK	Indofood Sukses Makmur Tbk.
ADRO.JK	Adaro Eergy Tbk.	INTP.JK	Indocement Tunggul Prakarsa Tbk.
AKRA.JK	AKR Corporindo Tbk.	JSMR.JK	Jasa Marga (Persero) Tbk.
ANTM.JK	Aneka Tambang (Persero) Tbk.	KLBF.JK	Kalbe Farma Tbk.
ASII.JK	Astra International Tbk.	LPKR.JK	Lippo Karawaci Tbk.
BBCA.JK	Bank Central Asia Tbk.	LPPF.JK	Matahari Departement Store Tbk.
BBNI.JK	Bank Negara Indoensia (Persero) Tbk.	MNCN.JK	Media Nusantara Citra Tbk.
BBRI.JK	Bank Rakyat Indonesia (Persero) Tbk.	MYRX.JK	Hanson International Tbk.
BMRI.JK	Bank Mandiri (Persero) Tbk.	PGAS.JK	Perusahaan Gas Negara (Persero) Tbk.
BMTR.JK	Global Mediacom Tbk.	PTBA.JK	Bukit Asam Tbk.
BRPT.JK	Barito Pasific Tbk.	PWON.JK	Pakuwon Jati Tbk.
BSDE.JK	Bumi Serpong Damai Tbk.	SCMA.JK	Surya Citra Media Tbk.
BUMI.JK	Bumi Resources Tbk.	SMGR.JK	Semen Indonesia (Persero) Tbk.
EXCL.JK	XL Axiata Tbk.	TLKM.JK	Telekomunikasi Indonesia (Persero) Tbk.
GGRM.JK	Gudang Gatam Tbk.	UNTR.JK	United Tractors Tbk.
HMSP.JK	H.M. Sampoerna Tbk.	UNVR.JK	Unilever Indonesia Tbk.
ICBP.JK	Indofood CBP Sukses Makmur Tbk.	WIKA.JK	Wijaya Karya (Persero) Tbk.
INCO.JK	Vale Indonesia Tbk.		

- Untuk optimasi portofolio *mean-variance* dengan reduksi dimensi, data harga saham dibagi menjadi 9 *time windows* dan 18 *time windows*. Setiap *windows* memiliki interval waktu yang sama. misalkan [X] merupakan dataset harga saham dengan n adalah banyaknya saham, p banyaknya hari, dan k banyaknya *windows*.

**Gambar 2 Pembagian dataset ke beberapa windows**

Keterangan :  $[X_{it}]$  windows dengan ukuran  $n \cdot p / k$

- Reduksi Dimensi  
Setiap *windows* direduksi menggunakan *non-negative principal component analysis* dan *principal component analysis*. Untuk setiap *windows* diambil 10 principal component dengan proporsi *variance* terbesar.



Gambar 3 Flowchart proses reduksi dimensi

4. *Statistical Variance Procedure*

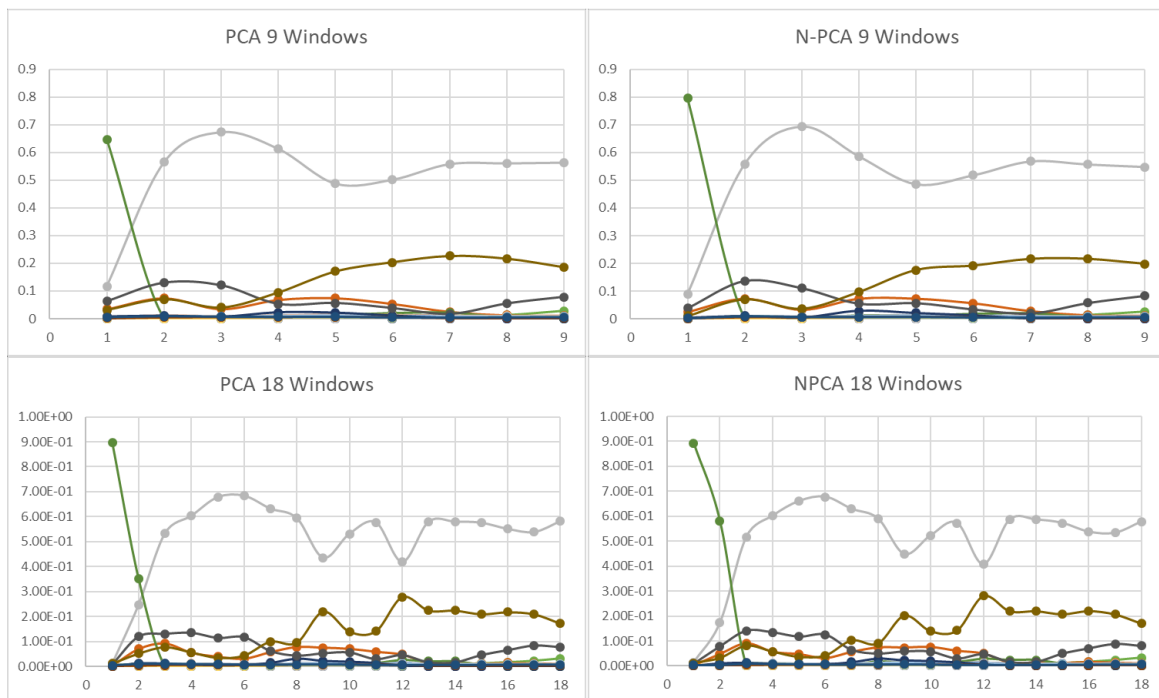
Setiap *windows* dihitung menggunakan *statistical variance procedure* agar menjadi nilai tunggal.

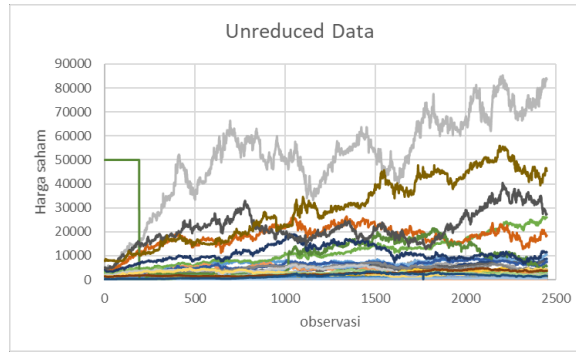
5. Optimasi *Mean-Variance* portofolio

Dataset baru dengan harga yang sudah tereduksi kemudian diimplementasi pada *mean-variance* portofolio. Untuk mengetahui alokasi/pembobotan setiap saham.

4. Evaluasi

4.1 Hasil Pengujian



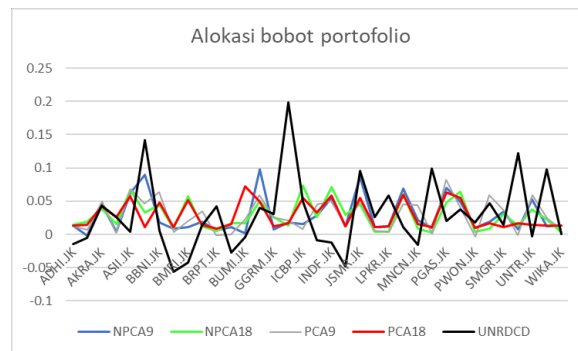


Gambar 4 grafik data saham sebelum dan sesudah reduksi dimensi

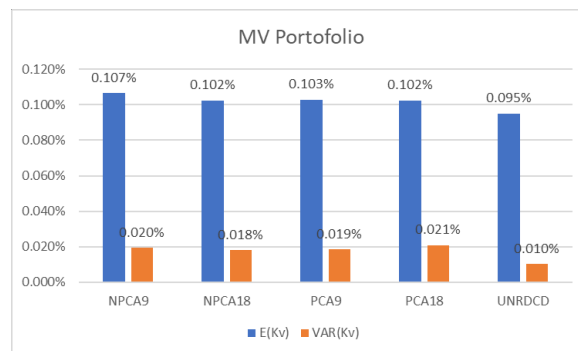
**Tabel 1 Proporsi variance kumulatif dari 10 PC**

Proporsi variance kumulatif 10 pc, 9 windows,		
Windows	PCA 9W	N-PCA 9W
X1	0.99996	0.99991
X2	0.99994	0.99985
X3	0.99996	0.99990
X4	0.99994	0.99982
X5	0.99992	0.99985
X6	0.99994	0.99983
X7	0.99994	0.99988
X8	0.99996	0.99991
X9	0.99996	0.99990

Proporsi variance kumulatif 10 pc, 18 windows		
Windows	PCA 18W	N-PCA 18W
X1	0.99999	0.99996
X2	0.99997	0.99992
X3	0.99997	0.99991
X4	0.99997	0.99993
X5	0.99998	0.99995
X6	0.99998	0.99995
X7	0.99998	0.99994
X8	0.99995	0.99989
X9	0.99993	0.99984
X10	0.99998	0.99994
X11	0.99997	0.99994
X12	0.99995	0.99989
X13	0.99996	0.99990
X14	0.99998	0.99995
X15	0.99998	0.99995
X16	0.99998	0.99995
X17	0.99998	0.99994
X18	0.99998	0.99994



**Gambar 5 Alokasi bobot optimasi portofolio**



**Gambar 6 Expected return dan variance portofolio**

#### 4.2 Analisis Hasil Pengujian

Hasil reduksi dimensi menggunakan *non-negative* PCA cenderung mirip dengan menggunakan PCA. Proporsi *variance* kumulatif 10 PC pada setiap *windows* pada PCA cenderung lebih besar dibandingkan pada *non-negative* PCA. Pada gambar 6 grafik MV portofolio, hasil alokasi bobot portofolio dengan menggunakan implementasi *non-negative* PCA 9 *windows* menghasilkan *expected return* 0,107% dan *variance* sebesar 0,020% lebih baik dibandingkan dengan *non-negative* PCA 18 *windows* yang menghasilkan *expected return* 0,102% dan *variance* 0,018%. Hasil implementasi PCA 9 *windows* menghasilkan *expected return* 0,103% dan *variance* 0,019% lebih baik dibandingkan dengan PCA 18 *windows* yang menghasilkan *expected return* 0,102% dan *variance* 0,021%

Hasil alokasi bobot portofolio dengan menggunakan implementasi *non-negative* PCA 9 *windows* menghasilkan *expected return* tertinggi sebesar 0,107% dan *variance* sebesar 0,020%, PCA 9 *windows* mendapatkan hasil *expected return* 0,103% dan *variance* 0,019%, *non-negative* PCA 18 *windows* mendapatkan hasil *expected return* sama dengan PCA 18 *windows* sebesar 0,102% tetapi mendapatkan hasil *variance* yang berbeda, pada *non-negative* PCA 18 *windows* *variance* yang dihasilkan sebesar 0,018% sedangkan pada PCA 18 *windows* *variansi* yang dihasilkan sebesar 0,021%. Hasil *mean-variance* tanpa reduksi dimensi menghasilkan *expected return* 0,095% dan *variance* 0,010%.

## 5. Kesimpulan

Berdasarkan analisis pengujian, dapat disimpulkan bahwa hasil optimasi portofolio *mean-variance* menggunakan metode reduksi dimensi *Non-negative* PCA 9 *windows* dengan *expected return* 0,107% dan *variance* 0,021% lebih baik dibandingkan dengan metode reduksi dimensi *non-negative* PCA 18 *windows* yang menghasilkan *expected return* 0,102% dan *variance* 0,018%, PCA 9 *windows* yang menghasilkan *expected return* 0,103% dan *variance* 0,019%, PCA 18 *windows* yang dihasilkan sebesar 0,018% sedangkan pada PCA 18 *windows* *variansi* yang dihasilkan sebesar 0,021%, dan *mean-variance* tanpa reduksi yang menghasilkan *expected return* 0,095% dan *variance* 0,010%..

**Daftar Pustaka**

- [1] Halit Alper Tayalı and Seda Tolun (2018). *Dimension Reduction in Mean-Variance Portofolio Optimization*. Expert Systems with Applications Vol. 92, No 161–169.
- [2] Jolliffe I.T. (2002). *Principal Components Analysis* (Second Edition). New York: Springer-Verlag.
- [3] Capinsky, M., & Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. London: SpringerVerlag.
- [4] Halit Alper Tayalı and Mehpare Timor (2017), *Ranking with Statistical Variance Procedure based Analytic Hierarchy Process*, Acta Infologica, Cilt : Sayı : Haziran.
- [5] Zhu, Y. (2004). *High Performance Data Mining in Time Series: Techniques and Case Studies*. New York University.
- [6] Pafka, S., & Kondor, I. (2004). *Estimated Correlation Matrices and Portofolio Optimization*. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 343, 623–634.
- [7] Montanari, A., & Richard, E. (2015). *Non-negative principal component analysis: Message passing algorithms and sharp asymptotics*. IEEE Transactions on Information Theory, 62(3), 1458–1484.