

Steganografi Citra berdasarkan *Discrete Wavelet Transform* dan *QR decomposition* menggunakan *Least Significant Bit* dan Deret Fibonacci

Discrete Wavelet Transform and QR decomposition based Image Steganography using Least Significant Bit and Fibonacci Sequence

Tita Haryanti¹, Bambang Hidayat², Gelar Budiman³

^{1,2,3} Prodi S1 Teknik Telekomunikasi, Fakultas Teknik Elektro, Universitas Telkom

¹titaharyanti@student.telkomuniversity.ac.id, ²bhidayat@telkomuniversity.ac.id,

³gelarbudiman@telkomuniversity.ac.id

Abstrak

Pada perkembangan teknologi yang semakin pesat saat ini menjadikan pertukaran data digital semakin mudah dan cepat, misalnya melalui internet. Dengan adanya kemudahan dalam pertukaran data digital, seseorang dapat melakukan *interruption*, *interception*, dan *modification* pada data digital tersebut. Untuk menjamin keamanan dan kerahasiaan data diperlukan suatu teknik untuk mengamankan data tersebut, salah satunya dengan steganografi.

Dalam tugas akhir ini, skema steganografi citra berdasarkan metode DWT dan *QR decomposition* diusulkan untuk menyisipkan pesan rahasia kedalam citra *host* berwarna pada *color space* dan *layer* tertentu. Pertama, citra *host* RGB dikonversi ke *color space* tertentu. *Layer* dimana pesan rahasia disisipkan juga bisa dipilih. Setelah *layer* citra yang dipilih pada *color space* tertentu ditransformasikan oleh DWT, selanjutnya dibagi menjadi blok *pixel* 8×8 yang tidak tumpang tindih. Kemudian, setiap blok *pixel* yang dipilih didekomposisi dengan *QR decomposition* dan elemen pada matriks *R* dihitung untuk disisipi informasi pesan rahasia. Pesan rahasia disisipkan ke dalam matriks *R* dari *QR decomposition* pada citra *host* dengan menggunakan metode LSB, dimana posisi yang dipilih ditentukan sesuai dengan angka Fibonacci yang digunakan untuk memperkuat dan menentukan lokasi penyisipan.

Kata Kunci: Steganografi Citra, *Discrete Wavelet Transform*, *QR decomposition*, *Least Significant Bit* (LSB), deret Fibonacci.

Abstract

The rapid development of technology is making the exchange of digital data more easily and quickly, such as through the internet. But the other side, the impact of the ease of exchanging digital data, someone can do interrupt, interception, and modification to the digital data. To ensure the security and confidentiality of data required a technique to secure the data, one of this is steganography.

In this final project, color image steganography scheme based on Discrete Wavelet Transform (DWT) and QR decomposition is proposed to embed secret message into color host image in certain color space and layer. Firstly, the host RGB image is converted to certain color space. The layer in which the secret message is embedded also can be selected. After the selected layer of image in certain color space is transformed by DWT, further divided to 8×8 non-overlapping pixel blocks. Then, each selected pixel block is decomposed by QR decomposition and the elements in the matrix R is quantified for embedding secret message information. The secret message is embedded into the R matrix of QR decomposition of color host image using LSB method, where the selected position is determined according to the Fibonacci number are used for estimating the embedding strength and location.

Keywords: Image Steganography, Discrete Wavelet Transform, QR decomposition, Least Significant Bit, Fibonacci Sequence.

1. Pendahuluan

Steganografi adalah suatu cara atau seni menyembunyikan data pada suatu media sehingga hanya pihak pengirim dan penerima saja yang mengetahui data tersebut. Media pembawa dapat berupa video digital, citra, audio atau jenis media lainnya. Di antara berbagai jenis media, citra

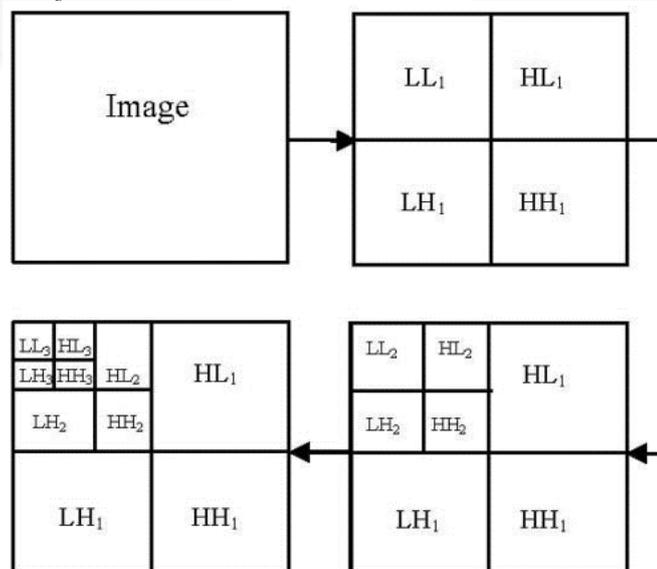
digital adalah yang paling populer digunakan sebagai media pembawa untuk menyampaikan informasi rahasia. Pada sistem steganografi citra, citra yang akan disisipi data rahasia disebut citra *host*. Citra yang dihasilkan adalah citra yang telah disisipi data rahasia, disebut citra-stego [1].

Dalam tugas akhir ini, skema steganografi citra berdasarkan metode DWT dan QR *decomposition* diusulkan untuk menyisipkan pesan rahasia kedalam citra *host* berwarna pada *color space* dan *layer* tertentu. Pertama, citra *host* RGB dikonversi ke *color space* tertentu. *Color space* yang tersedia dan dapat dipilih adalah RGB, YCbCr atau NTSC. *Layer* dimana pesan rahasia disisipkan juga bisa dipilih. Pilihan yang tersedia adalah *layer 1*, *layer 2*, *layer 3*, *layer 1 & 2*, *layer 2 & 3*, *layer 1 & 3* dan semua *layer 1, 2 & 3*. Setelah *layer* citra yang dipilih pada *color space* tertentu ditransformasikan oleh DWT, selanjutnya dibagi menjadi blok *pixel* 8×8 yang tidak tumpang tindih. Kemudian, setiap blok *pixel* yang dipilih didekomposisi dengan QR *decomposition* dan elemen pada matriks *R* dihitung untuk disisipi informasi pesan rahasia. Pesan rahasia disisipkan ke dalam matriks *R* dari QR *decomposition* pada citra *host* dengan menggunakan metode LSB, dimana posisi yang dipilih ditentukan sesuai dengan angka Fibonacci yang digunakan untuk memperkuat dan menentukan lokasi penyisipan. Penelitian serupa tentang steganografi citra yang menggunakan metode DWT dan QR *decomposition* telah dipaparkan oleh [2][3][4][5][6]. Perbedaan antara penelitian [2][3][4][5][6] dengan tugas akhir ini adalah penelitian tersebut tidak menggunakan deret Fibonacci dan metode LSB sebagai skema penyisipan untuk menyembunyikan data.

2. Dasar Teori

2.1 Discrete Wavelet Transform (DWT)

DWT adalah salah satu transformasi matematika yang penting yang memiliki banyak aplikasi dalam sains, teknik dan ilmu komputer. Lebih khusus lagi, digunakan untuk kompresi citra. Karena kelebihanannya seperti kemiripan struktur data berkenaan dengan resolusi dan dekomposisi yang bisa dilakukan pada level manapun, DWT telah berhasil diterapkan pada bidang steganografi citra. Setiap level DWT menguraikan sebuah citra menjadi empat sub-band yaitu komponen aproksimasi LL, komponen detail horisontal HL, komponen detail vertikal LH dan komponen detail diagonal HH. Sebagian besar informasi yang terkandung dalam citra asli terkonsentrasi ke sub-band LL setelah satu level DWT. Sub-band LL selanjutnya dapat didekomposisi untuk mendapatkan level dekomposisi yang lain. Dekomposisi berlanjut pada sub-band LL sampai hasil yang diinginkan tercapai [5], atau sampai skala akhir level '*N*' tercapai. Ketika '*N*' tercapai, $3N + 1$ sub-band diperoleh yang terdiri dari sub-band multi resolusi, yaitu LLX dan LHX, HLX dan HHX, di mana '*X*' berkisar dari 1 sampai '*N*'. Umumnya, sebagian besar energi citra disimpan di sub-band LLX [7]. Secara sederhana ditunjukkan oleh Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Tiga Level Dekomposisi DWT

2.2 QR Decomposition

Pada *QR decomposition* setiap matriks dapat digambarkan sebagai:

$$A = QR \quad (2.1)$$

dimana Q adalah matriks $m \times n$ dengan kolom ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas $n \times n$. Dalam metode ini, kolom Q dibuat dari kolom A oleh proses Gram-Schmidt. A dan Q masing-masing didefinisikan sebagai $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$, dimana a_i dan q_i adalah vektor kolom, dan matriks R direpresentasikan sebagai berikut [4]:

$$R = \begin{bmatrix} \langle a_1, q_1 \rangle & \langle a_2, q_1 \rangle & \dots & \langle a_n, q_1 \rangle \\ 0 & \langle a_2, q_2 \rangle & \dots & \langle a_n, q_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle a_n, q_n \rangle \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Salah satu kelebihan dari matriks R yang digunakan dalam skema ini adalah bahwa ketika kolom A memiliki korelasi satu sama lain seperti dalam kasus ini, nilai absolut elemen dari matriks R adalah lebih besar dan yang lainnya nol. Jadi, dalam skema ini untuk menyisipkan pesan rahasia digunakan matriks R agar tidak menimbulkan persepsi visual yang signifikan pada citra-stego, karena hanya matriks R yang memiliki nilai dan yang lainnya nol.

2.3 Deret Fibonacci

Deret Fibonacci didefinisikan oleh relasi rekuren berikut [8]:

$$\begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Setiap angka Fibonacci dapat ditunjukkan oleh *Golden Ratio* [9]. Persamaan (2.4) menunjukkan bagaimana setiap angka Fibonacci dihasilkan oleh *Golden Ratio*.

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \quad (2.4)$$

φ adalah positif, maka $\varphi = 1,618$.

Persamaan dasar F_n pada representasi Fibonacci adalah jumlah dari deretnya [8]:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \forall n \geq 2 \quad (2.5)$$

2.4 Least Significant Bit

Dalam metode penyisipan LSB klasik, pesan rahasia dimasukkan ke dalam *least significant bit-plane* dari citra *host* baik dengan mengganti bit secara langsung atau dengan memodifikasi bit tersebut sesuai dengan fungsi tertentu. Strategi penyisipan juga dapat didasarkan pada penyisipan pesan secara berurutan atau penyisipan pesan secara selektif di area "noisy" atau penyebaran secara acak di seluruh citra [8]. Metode terbaru menerapkan LSB tidak hanya di *least significant bit-plane*, namun juga di *bit-plane* lainnya atau campuran keduanya [10], seperti yang dilakukan pada penelitian ini. Bit yang diganti adalah LSB karena perubahan tersebut hanya mengubah nilai *byte* 1 level lebih tinggi atau lebih rendah dari nilai sebelumnya. Misalkan *byte* tersebut didalam gambar memberikan persepsi warna merah, maka perubahan satu bit LSB hanya mengubah persepsi warna merah yang tidak terlalu berarti. Mata manusia tidak dapat membedakan perubahan sekecil itu.

3. Perancangan Sistem

Perancangan sistem dalam tugas akhir ini menggunakan metode DWT, *QR decomposition*, LSB dan deret Fibonacci dengan pesan rahasia berupa teks sebanyak tujuh belas karakter. Steganografi citra dalam sistem ini melalui dua proses yaitu proses penyisipan dan proses ekstraksi. Tahapan proses secara detail adalah sebagai berikut:

3.1 Proses Penyisipan

Tahap penyisipan pesan rahasia kedalam citra *host* diuraikan secara rinci sebagai berikut:

Tahap 1. *Pre-processing* pada pesan rahasia (teks)

Setiap nilai karakter diubah menjadi urutan biner 8 bit. Kemudian, menggabungkan semua urutan biner 8 bit untuk membentuk komponen biner pesan rahasia $w(n)$.

Tahap 2. Blok pemrosesan citra *host*

Citra *host* $x(m, n)$ dibagi menjadi tiga komponen $x_i(m, n)$; ($i = 1, 2, 3$), yang masing-masing mewakili komponen R, G dan B.

Tahap 3. Pemrosesan DWT

Setiap komponen citra $x(m, n)$ ditransformasikan oleh DWT, dan bagian frekuensi rendah LL dibagi menjadi 8×8 blok yang tidak tumpang tindih.

Tahap 4. Pemrosesan QR *decomposition*

Setiap blok 8×8 yang dipilih didekomposisi dengan QR *decomposition* sesuai dengan Persamaan (2.2) untuk mendapatkan matriks segitiga atas R , $R(m, n)$.

Tahap 5. Pemrosesan berdasarkan deret Fibonacci

Memilih/menentukan lokasi (*pixel*) penyisipan pada citra *host* berdasarkan angka Fibonacci, yang berfungsi meningkatkan *security* dan *imperceptibility* pada citra-stego. Metode LSB diterapkan tidak hanya di *least significant bit-plane*, namun juga di *bit-plane* lainnya tergantung pada nilai L_p (lokasi penyisipan).

Tahap 6. Menyisipkan pesan rahasia (teks)

Pesan rahasia $w(n)$ disisipkan pada matriks $R(m, n)$. Algoritmanya seperti: jika L_p sama dengan 1, maka lokasi penyisipannya adalah pada bit pertama; jika L_p sama dengan 2, maka lokasi penyisipannya adalah pada bit kedua, dan begitu seterusnya sampai batas yang ditentukan pada penelitian tugas akhir ini adalah L_p sama dengan 6.

Tahap 7. Pemrosesan QR *reconstruction*

Untuk semua koefisien pada matriks $R(m, n)$, diterapkan operasi QR *reconstruction* untuk mendapatkan blok citra-stego sesuai dengan Persamaan (3.1).

$$A'(m, n) = Q(m, n) \times R'(m, n) \quad (3.1)$$

Tahap 8. Pengulangan

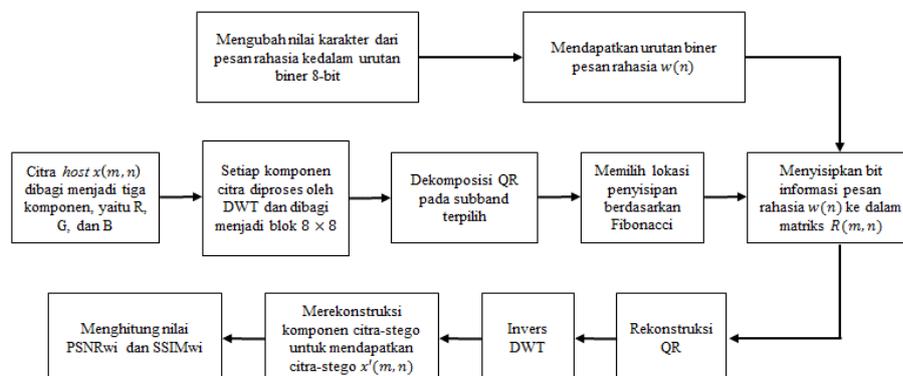
Ulangi tahap 4-7 sampai semua bit pesan rahasia disisipkan di DWT frekuensi rendah dari citra *host*.

Tahap 9. Pemrosesan invers DWT

Melakukan invers DWT dari setiap komponen citra-stego akhir. Komponen stego-R, G dan B diperoleh dengan invers DWT, dan citra-stego $x'(m, n)$ direkonstruksi oleh tiga komponen tersebut.

Tahap 10. Menghitung nilai PSNR dan SSIM

Tujuannya adalah untuk mengetahui kualitas parameter *imperceptibility* pada citra-stego.



Gambar 3.1 Diagram Proses Penyisipan

3.2 Proses Ekstraksi

Proses ekstraksi steganografi citra terdiri dari beberapa tahap. Tahapan rinci dari proses ekstraksi adalah sebagai berikut:

Tahap 1. *Pre-processing* pada citra-stego

Citra-stego $x'(m, n)$ dipisahkan menjadi komponen citra R, G dan B.

Tahap 2. Pemrosesan DWT

Setiap komponen citra-stego $x'(m, n)$ ditransformasikan oleh DWT, dan bagian frekuensi rendah LL dibagi menjadi 8×8 blok yang tidak tumpang tindih.

Tahap 3. Pemrosesan *QR decomposition*

Setiap blok stego didekomposisi dengan *QR decomposition* dan matriks $R'(m, n)$ diperoleh.

Tahap 4. Pemrosesan berdasarkan deret Fibonacci

Menemukan lokasi (*pixel*) ekstraksi pada citra-stego berdasarkan angka Fibonacci, kemudian, setiap nilai *pixel* (yang merupakan *pixel* yang dipilih) diubah kedalam bilangan Fibonacci menjadi 12-bit berdasarkan teorema Zeckendorf. Prosedur ekstraksi yaitu untuk menguraikan *pixel* yang dipilih kedalam domain Fibonacci, dan juga untuk memilih bidang (*plane*) mana yang harus diekstrak.

Tahap 5. Mengekstrak pesan rahasia (teks)

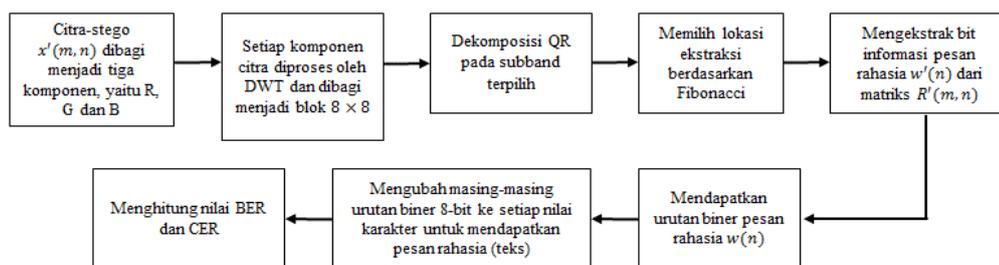
Setiap elemen pada baris pertama matriks $R'(m, n)$ digunakan untuk mengekstrak informasi pesan rahasia $w'(n)$.

Tahap 6. Pengulangan

Tahap 3-6 diulang sampai ekstraksi semua pesan rahasia selesai dilakukan. Nilai bit yang diekstraksi ini dipartisi menjadi kelompok 8-bit dan dikonversi ke nilai desimal, sampai menghasilkan pesan rahasia $w(n)$.

Tahap 7. Menghitung nilai BER dan CER

Tujuannya adalah untuk mengetahui ketahanan (*robustness*) pesan rahasia $w(n)$ ketika diberikan berbagai macam serangan dan mengetahui benar atau tidaknya sistem dalam mengekstrak bit-bit pesan yang disisipkan, karena tujuan steganografi adalah menyampaikan pesan dengan benar.



Gambar 3.2 Diagram Proses Ekstraksi

3.3 Proses Penambahan Noise

Pada penelitian tugas akhir ini, untuk mengetahui ketahanan citra-stego maka sistem ini diuji dengan berbagai macam serangan, yaitu kompresi JPG, LPF, *median filter*, *histogram*, *Gaussian*, *salt and pepper*, *resize*, *rotate* dan *cropping*. Kemudian hasilnya diuji dengan parameter kinerja PSNR, BER, CER dan MOS.

4. Pengujian Sistem dan Analisis

4.1 Analisis secara Objektif

Dalam evaluasi ini, jumlah citra yang akan diuji sebagai citra *host* adalah sebanyak lima buah citra yaitu: tulips50.bmp, peppers50.bmp, fruits50.bmp, baboon50.bmp dan airplane50.bmp, yang merupakan citra warna pada *color space* RGB dan *layer* yang digunakan sebagai tempat penyisipan pesan rahasia adalah semua *layer*, yaitu *layer* 1, 2 dan 3. Sedangkan, pesan rahasia yang disisipkan ke dalam citra *host* terdiri dari 17 karakter, yaitu *Telkom University*. Dalam melakukan pengujian analisis sistem pada tugas akhir ini, berfokus pada karakteristik steganografi *imperceptibility* dan *robustness* pada citra-stego. Terdapat dua indikator kinerja yang digunakan untuk simulasi: *robustness* (BER) dan *imperceptibility* (PSNR).

Pada percobaan pertama yaitu menjalankan simulasi steganografi citra untuk menemukan parameter optimum untuk lima citra *host* dengan pesan rahasia yang sama. Diasumsikan bahwa tidak ada serangan terhadap citra-stego. Hasil simulasi ditampilkan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Pengaruh Parameter Steganografi Citra terhadap Kinerja “Tanpa Serangan”

Parameter Input				Parameter Kinerja				tulips50.bmp	
N	L p	Jumlah w(n)	modefile	PSNR	SSIM	BER	CER	Persen (%)	Waktu Proses
2	6	17	0	55.55	1.00	0.00	0.00	4.43	2.77
2	6	17	1	55.55	1.00	0.00	0.00	4.43	2.40
Parameter Input				Parameter Kinerja				peppers50.bmp	
N	L p	Jumlah w(n)	modefile	PSNR	SSIM	BER	CER	Persen (%)	Waktu Proses
2	6	17	0	55.22	1.00	0.00	0.00	4.43	2.41
2	6	17	1	55.22	1.00	0.00	0.00	4.43	2.69
Parameter Input				Parameter Kinerja				fruits50.bmp	
N	L p	Jumlah w(n)	modefile	PSNR	SSIM	BER	CER	Persen (%)	Waktu Proses
2	6	17	0	55.55	1.00	0.00	0.00	4.43	2.43
2	6	17	1	55.55	1.00	0.00	0.00	4.43	2.62
Parameter Input				Parameter Kinerja				baboon50.bmp	
N	L p	Jumlah w(n)	modefile	PSNR	SSIM	BER	CER	Persen (%)	Waktu Proses
2	6	17	0	55.65	1.00	0.00	0.00	4.43	2.37
2	6	17	1	55.65	1.00	0.00	0.00	4.43	2.45
Parameter Input				Parameter Kinerja				airplane50.bmp	
N	L p	Jumlah w(n)	modefile	PSNR	SSIM	BER	CER	Persen (%)	Waktu Proses
2	6	17	0	55.12	1.00	0.00	0.00	4.43	2.39
2	6	17	1	55.12	1.00	0.00	0.00	4.43	2.42

Pada Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa parameter optimum didapatkan ketika $N=2$ dan $L_p=6$, memiliki nilai BER = 0 atau tidak ada error pada pesan rahasia yang diekstrak dan PSNR > 50 dB atau citra *host* dan citra-stego terlihat mirip dan tidak dapat dibedakan.

4.2 Analisis secara Subjektif

Pengujian sistem secara subjektif dilakukan dengan melakukan tes citra kepada tiga puluh orang responden. Tes citra ini dinamakan dengan *Mean Opinion Score* (MOS) dimana responden diminta untuk membandingkan perbedaan kualitas dari citra *host* dengan citra-stego. Hasil rata-rata penilaian responden dapat dilihat pada Tabel 4.2 berikut.

Tabel 4.2 MOS untuk Citra *Host* dan Citra-Stego

Parameter terbaik untuk mode file=0				
tulips50.bmp	peppers50.bmp	fruits50.bmp	baboon50.bmp	airplane50.bmp
5	5	5	5	5
Parameter terbaik untuk mode file=1				
tulips50.bmp	peppers50.bmp	fruits50.bmp	baboon50.bmp	airplane50.bmp
5	5	5	5	5

Berdasarkan Tabel 4.2 tersebut, dapat disimpulkan bahwa citra *host* dan citra-stego untuk semua file citra baik pada mode file sama dengan 0 maupun pada mode file sama dengan 1 mempunyai tingkat kemiripan yang “sama persis”, atau dengan kata lain, citra *host* dan citra-stego terlihat sama dan tidak dapat dibedakan.

5. Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian tugas akhir ini adalah bahwa dengan menerapkan metode DWT, QR, LSB dan deret Fibonacci pada steganografi citra dengan data rahasia berupa teks, dapat meningkatkan *robustness* dan *imperceptibility* pada citra-stego. Bisa dikatakan sempurna dengan nilai BER sama dengan 0, nilai CER sama dengan 0, nilai SSIM sama dengan 1 dan PSNR lebih dari 50 dB, ketika citra-stego tidak diberikan serangan apapun.

5.2 Saran

Penelitian tugas akhir ini masih perlu untuk dikembangkan dan dioptimasi karena untuk beberapa jenis serangan tertentu yang dilakukan pada penelitian tugas akhir ini, masih menghasilkan pesan rahasia yang memiliki nilai BER dan CER tidak sama dengan 0. Sehingga, perlu ada penelitian lanjutan tentang metode yang bisa mengoptimasi atau memperbaiki performansi steganografi citra yang telah dilakukan pada penelitian tugas akhir ini.

Daftar Pustaka

- [1] A. Jois and L. Tejaswini, “Survey on LSB Data Hiding techniques,” *Proc. 2016 IEEE Int. Conf. Wirel. Commun. Signal Process. Networking, WiSPNET 2016*, vol. 16, no. 7, pp. 656–660, 2016.
- [2] L. Sun *et al.*, “Chaotic system and QR factorization based Robust Digital Image Watermarking Algorithm,” *Huagong Xuebao/CIESC J.*, vol. 18, no. 2, pp. 116–124, 2011.
- [3] K. U. Singh and A. Singhal, “A Color Image Watermarking Scheme Based on QR Factorization, Logistic and Lorentz Chaotic Maps,” *Int. J. Recent Innov. Trends Comput. Commun.*, vol. 5, no. 5, pp. 291–296, 2017.
- [4] Y. Naderahmadian and S. Hosseini-Khayat, “Fast Watermarking Based on QR Decomposition in Wavelet Domain,” *Proc. - 2010 6th Int. Conf. Intell. Inf. Hiding*

- Multimed. Signal Process. IHHMSP 2010*, vol. 10, no. 978-0-7695-4222-5, pp. 127–130, 2010.
- [5] Y. Guo, B. Li, and N. Goel, “Optimised blind Image Watermarking method based on Firefly Algorithm in DWT-QR transform domain,” *Inst. Eng. Technol. Image Process.*, vol. 11, no. 6, pp. 406–415, 2017.
- [6] S. Jia, Q. Zhou, and H. Zhou, “A Novel Color Image Watermarking Scheme Based on DWT and QR Decomposition,” *J. Appl. Sci. Eng.*, vol. 20, no. 2, pp. 193–200, 2017.
- [7] P. Shanthi and R. S. Bhuvaneshwaran, “Image Watermarking Using Fibonacci Transform,” *Asian J. Inf. Technol. 15*, vol. 9, no. 1682–3915, pp. 1431–1436, 2016.
- [8] D. De Luca Picione, F. Battisti, M. Carli, J. Astola, and K. Egiazarian, “A Fibonacci LSB Data Hiding Technique,” *Eur. Signal Process. Conf.*, no. 14th Eusipco, pp. 4–8, 2006.
- [9] M. Fallahpour and D. Megías, “Robust Audio Watermarking based on Fibonacci numbers,” *IEEE 10th Int. Conf. Mob. Ad-hoc Sens. Networks*, vol. 14, no. 978-1-4799-7394-1, pp. 343–349, 2014.
- [10] A. D. Richard, *Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. 1997.

