

Simulasi *Dam Break* dengan menggunakan Persamaan Air Dangkal dengan Implementasi Skema *Lax-Wendroff Finite Volume Method*

Radika Raffi Gibran¹, Didit Adytia², Dede Tarwidi³,

^{1,2,3}Fakultas Informatika, Universitas Telkom, Bandung

¹radikaraffi@students.telkomuniversity.ac.id, ²adytia@telkomuniversity.ac.id,

³dedetarwidi@telkomuniversity.ac.id

Abstrak

Dam adalah sebuah konstruksi yang dibangun untuk menahan laju air menjadi waduk, danau, atau tempat rekreasi, tidak jarang *dam* digunakan untuk mengaliri air ke sebuah pembangkit listrik tenaga air. *Dam* sendiri sebagai bangunan yang berupa tanah, batu, dan beton, *dam* dianggap sebagai bangunan yang berbahaya, karena dampak besar yang ditimbulkan jika *dam* itu hancur. Tugas Akhir ini akan membahas tentang simulasi *Shallow Water Equations (SWE)* dengan implementasi Skema *Lax-Wendroff* dalam satu dimensi menggunakan *Dam Break* sebagai studi kasus, metode numerik ini adalah salah satu solusi untuk persamaan diferensial parsial hiperbolik. Pada tugas akhir ini akan disimulasikan skema tersebut dan akan dilihat seberapa besar keakurasian dari skema tersebut untuk studi kasus seperti *Dam Break*.

Kata kunci : *Shallow Water Equation, Lax-Wendroff, Dam Break.*

Abstract

Dam is a construction that is built to withstand the rate of water into reservoirs, lakes, or recreational places, not infrequently the dam is used to drain water to a hydroelectric power plant. *Dam* itself as a building in the form of land, stone, and concrete, the dam is considered a dangerous building, because of the large impact caused if the dam is destroyed. This Final Project will discuss about the *Shallow Water Equations (SWE)* simulation with the implementation of the *Lax-Wendroff Scheme* in one dimension using *Dam Break* as a case study, this numerical method is one solution for hyperbolic partial differential equations. In this final project, the scheme will be simulated and it will be seen how much accuracy of the scheme is for case studies such as *Dam Break*.

Keywords: *Shallow Water Equation, Lax-Wendroff, Dam Break.*

1. Pendahuluan

Dam adalah bangunan penahan air yang berguna untuk irigasi, pembangkit listrik, dan sebagainya [1]. *Dam* memiliki bentuk yang berbeda-beda sesuai dengan tujuannya dibangun *dam* tersebut. Sebagai contoh, *dam* yang didesain untuk pengendalian banjir, mempunyai pintu-pintu yang dapat dibuka dan ditutup untuk mengatur debit air yang mengalir agar tidak terjadi banjir.

Disamping memiliki fungsi yang bermanfaat, *dam* sebenarnya menyimpan bahaya yang cukup besar. Apabila *dam* itu rusak atau roboh (*Dam-Break*), tentunya dapat mengakibatkan bencana bagi masyarakat yang berada dekat dengan daerah yang dibangun *dam*.

Bencana *dam break* biasanya menyebabkan banyak korban jiwa, kerusakan properti dan lingkungan. Sebagai contoh, bendungan Vajont pada tahun 1963 di Italia menyebabkan 2600 kematian, bendungan Teton di Amerika pada tahun 1976 ratusan orang meninggal dan kerugian ekonomi sekitar 1 miliar dolar, dan kegagalan bendungan Guohou pada tahun 1993 menyebabkan ratusan orang meninggal [2].

Alasan kegagalan bendungan dapat dibagi menjadi dua jenis, penyebab alamiah dan kesalahan manusia. Yang pertama: penyebab eksternal, seperti hujan lebat, angin topan, gempa bumi, dan lain-lain. Yang kedua: penyebab internal seperti cacat pada bendungan, cacat fondasi, dan sebagainya. Sebelum bencana kerusakan dan potensi ancaman kerusakan bendungan terjadi, kebutuhan untuk peramalan, pencegahan, dan pengurangan bencana kehancuran bendungan sangat dibutuhkan.

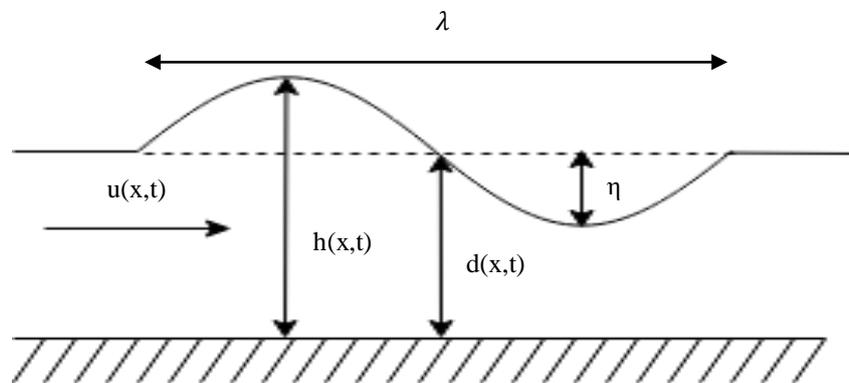
Dam break sendiri dapat disimulasikan dengan menggunakan model *Shallow Water Equations (SWE)*, *SWE* sering digunakan untuk memodelkan gelombang yang terjadi pada air dangkal, yang dimana panjang gelombang lebih besar dibandingkan kedalamannya $\lambda \gg d$ [3]. Dengan adanya model *SWE* tersebut kita bisa mengetahui bagaimana proses terjadinya *dam break*.

Masalah yang diangkat pada tugas akhir ini adalah bagaimana menyelesaikan solusi numerik SWE menggunakan skema *Lax-Wendroff*, dan dengan mengacu pada rumusan masalah tersebut, adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini yaitu untuk mensimulasikan skema *Lax-Wendroff* dengan studi kasus *dam break*. Setelah disimulasikan akan dilihat performansi skema tersebut untuk studi kasus *dam break*, dan akan dihitung juga berapa besar error yang terjadi pada skema tersebut menggunakan *Mean Square Error (MSE)* dan *Root Mean Square Error (RMSE)*.

Untuk mempermudah penulisan tugas akhir ini, diperlukan ruang lingkup masalah agar penulisan tugas akhir ini terarah dan berjalan dengan baik, adapun ruang lingkup pada penulisan tugas akhir ini adalah gelombang yang akan disimulasikan adalah gelombang satu dimensi dengan menggunakan skema *Lax-Wendroff*.

2. Shallow Water Equation (SWE)

SWE sering digunakan untuk memodelkan aliran air di sungai, danau, atau daerah pesisir. Asumsi utama memakai model SWE adalah model ini bergantung pada kedalaman dan panjang gelombang dimana ketentuannya adalah panjang gelombang lebih besar dibandingkan kedalamannya $\lambda \gg d$ [3]. Persamaan air dangkal terdiri atas dua persamaan yang diperoleh dari konservasi massa dan momentum. bentuk topografi fenomena SWE dapat dilihat pada gambar 2.1



Gambar 2.1 Fenomena *Shallow Water Equations*

Dimana pada gambar tersebut λ menyatakan Panjang gelombang, x dan t adalah dimensi spasial ruang dan waktu, kemudian untuk $h(x,t)$ dan $u(x,t)$ menyatakan total kedalaman dan kecepatan, dimana total kedalaman didapatkan dari $h=d+\eta$, disini η menyatakan tinggi permukaan air.

Bentuk umum dari model SWE:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

Persamaan (2.1) adalah persamaan kontinuitas dan persamaan (2.2) adalah persamaan momentum, dimana Δt adalah selisih waktu dan Δx adalah selisih jarak.

3. Flowchart Sistem

Berdasarkan tujuan dari Tugas Akhir yaitu mensimulasikan gelombang air dalam satu dimensi menggunakan metode *Lax-Wendroff Finite Volume Method*, maka perancangan sistem yang akan dibangun dapat dilihat pada gambar dibawah.



Gambar 3.1 Flowchart Sistem

Berdasarkan gambar 3.1 sistem yang dibangun dalam pengerjaan tugas akhir ini dimulai dari menentukan parameter yang akan digunakan , selanjutnya menentukan syarat awal yang digunakan (*dam break*), setelah menentukan syarat awal yang digunakan tahap selanjutnya adalah menentukan kondisi batas. Setelah kondisi batas ditentukan, tahap selanjutnya mengimplementasikan skema yang digunakan.

3.1 Metode Numerik

Pada TA ini akan digunakan *Finite Volume Method (FVM)* dengan skema *Lax-Wendroff* untuk solusi numerik satu dimensi. FVM adalah metode untuk menggambarkan persamaan differensial parsial dalam bentuk persamaan aljabar dan metode diskritisasi untuk pendekatan system persamaan differensial parsial yang menyatakan konservasi atau keseimbangan [4].

Pada persamaan (2.1) dan (2.2) akan diubah ke dalam bentuk persamaan transport, sehingga dihasilkan 2 vektor yaitu vektor \vec{U} dan vektor $\vec{F}(\vec{U})$ sebagai berikut .

$$\partial_t \vec{U} + \partial_x \vec{F}(\vec{U}) = 0 \quad (3.1)$$

Dimana:

$$\partial_t \vec{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix} \quad \partial_x \vec{F}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Dalam TA ini akan digunakan metode *Lax-Wendroff* untuk menghitung aproksimasi numerik ke solusi. Dimulai dengan mendefinisikan nilai \vec{U} pada langkah waktu $n + \frac{1}{2}$ dan titik tengahan dari grid, setiap langkah waktu melibatkan dua tahap penghitungan.. notasi $U_i^n \approx U(x_i, t^n)$ adalah U pada saat spasial ruang ke i dan waktu ke n

$$U_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_i^n)) \tag{3.3}$$

Tahap yang pertama adalah menghitung ketinggian air ketika di grid tengahan dengan mendiskritisasi matrix pada baris pertama, dimana $\vec{U} = h$ dan $\vec{F}(\vec{U}) = uh$ sehingga didapat skema Lax-Wendroff untuk menghitung ketinggian. UH pada persamaan di bawah digunakan untuk menghitung nilai u yang berada pada grid tengahan.

$$H_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(H_{i+1} + H_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(UH_{i+1} - UH_i) \tag{3.4}$$

Tahap yang kedua adalah menghitung kecepatan air ketika di grid tengahan dengan mendiskritisasi matrix pada baris kedua, dimana $\vec{U} = uh$ dan $\vec{F}(\vec{U}) = u^2h + \frac{1}{2}gh^2$ sehingga didapat skema Lax-Wendroff untuk menghitung kecepatan.

$$UH_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(UH_{i+1} + UH_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{(UH_{i+1})^2}{H_{i+1}} + \frac{1}{2}g(H_{i+1})^2 - \frac{(UH_i)^2}{H_i} + \frac{1}{2}g(H_i)^2 \right) \tag{3.5}$$

Lalu tahap selanjutnya adalah menghitung nilai \vec{U} pada langkah waktu yang full atau $n+1$ dengan menggunakan nilai yang sudah dihitung pada tahap pertama untuk menghitung nilai-nilai baru yang berada di pusat grid.

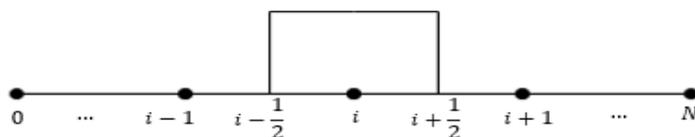
$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \tag{3.6}$$

Tahap yang pertama adalah menghitung ketinggian air ketika di grid penuh dengan menggunakan nilai ketinggian yang sudah dihitung sebelumnya di grid tengahan.

$$H_{i+1}^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (UH_{i+\frac{1}{2}} - UH_{i-\frac{1}{2}}) \tag{3.7}$$

Selanjutnya menghitung kecepatan air ketika di grid penuh, sama seperti sebelumnya dengan menggunakan nilai kecepatan yang sudah dihitung di grid tengahan.

$$UH_i^{n+1} = UH_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(UH_{i+\frac{1}{2}})^2}{H_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}g(H_{i+\frac{1}{2}})^2 - \frac{(UH_{i-\frac{1}{2}})^2}{H_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}g(H_{i-\frac{1}{2}})^2 \right) \tag{3.8}$$

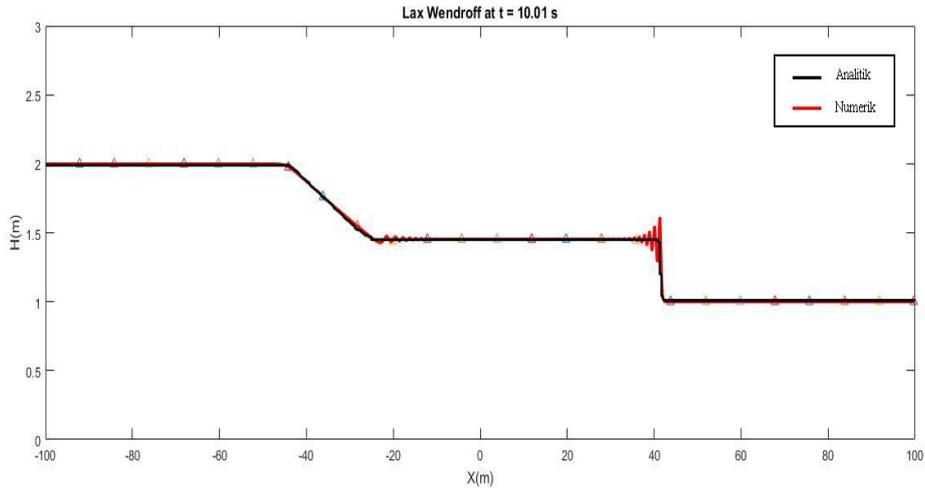


Gambar 3.2 grid ketika berada pada titik $i - 1, i - \frac{1}{2}, i, i + \frac{1}{2},$ dan $i + 1$

Setelah semua parameter dihitung, lalu deprogram dan disimulasikan dengan menggunakan bahasa MatLab. Pada bab selanjutnya akan dibahas hasil dari simulasi.

4. Hasil & Diskusi

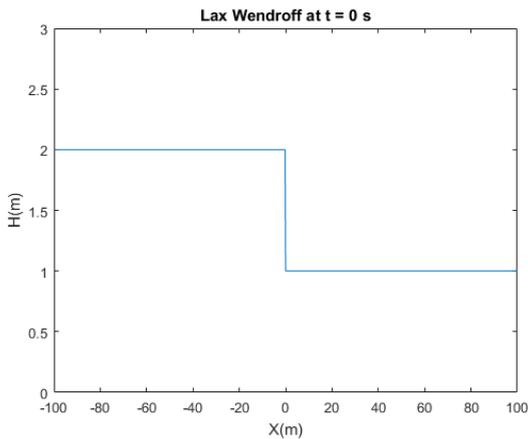
Setelah semua parameter diprogram menggunakan program *software* MatLab, didapatkan hasil dari simulasi *dam break* menggunakan skema *Lax-Wendroff* dengan parameter yang sudah digunakan adalah $n = 1001$, akselerasi gravitasi $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, dengan $L = 100$ dimana domain komputasinya adalah $x = [-L, L]$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, $\Delta x = 2 \cdot L / (n-1)$. Sedangkan untuk nilai syarat awal menggunakan *dam break* sebagai syarat awalnya digunakan $H_0 = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, untuk syarat batas digunakan $H_1 = H_2, H_N = H_{N-1}$, dan untuk $U_1 = U_2, U_N = U_{N-1}$, dimana N menunjukkan jumlah partisi di x.



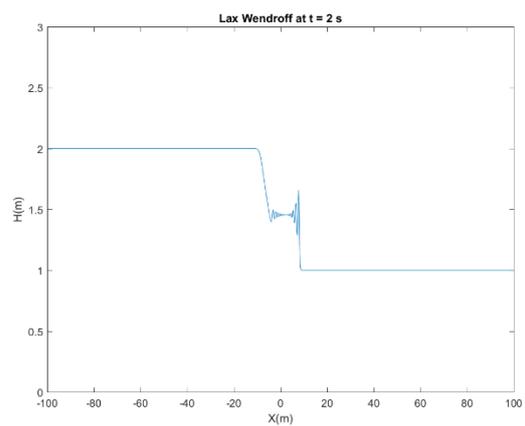
Gambar 4.1 komparasi antara solusi analitik dan solusi numerik menggunakan *Lax-Wendroff*

Berikut hasil komparasi antara solusi analitik dan solusi numerik menggunakan skema *Lax-Wendroff*. Solusi analitik ditunjukkan dengan garis utuh dan solusi numerik ditunjukkan dengan garis yang disertai segitiga. Dari komparasi antara solusi analitik dan numerik dapat kita lihat terdapat *numerical dispersion* yang membuat skema *Lax-Wendroff* tidak cukup stabil. Solusi analitik didapatkan dari paper rujukan dari (Justyna Machalinska-Murawska, Michal Szydlowski) [5]. Hasil komparasi di atas, dibandingkan dengan hasil pada paper [5].

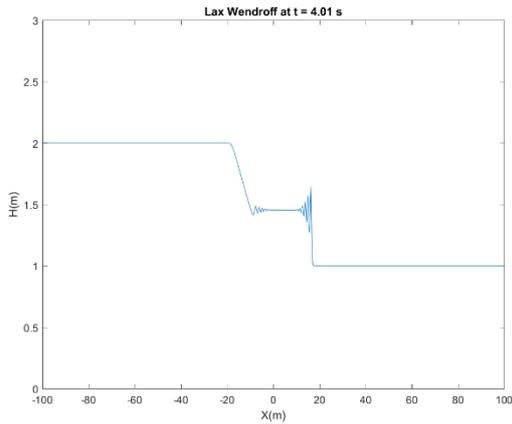
Berikut hasil simulasi yang sudah dijalankan pada *software* MatLab:



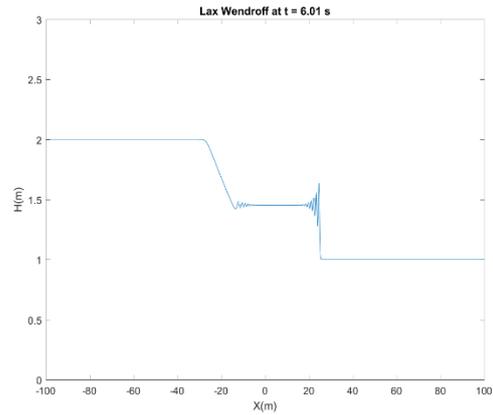
Gambar 4.2 Simulasi *dam break* ketika $t = 0$



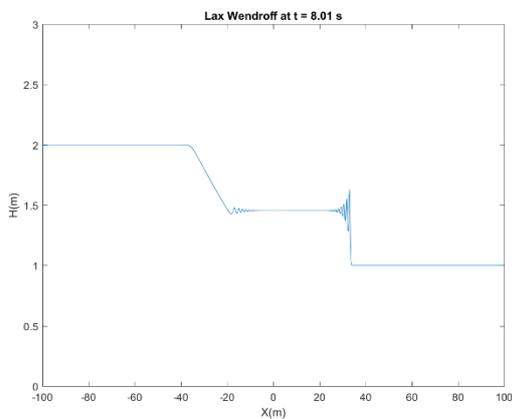
Gambar 4.3 Simulasi *dam break* ketika $t = 2$



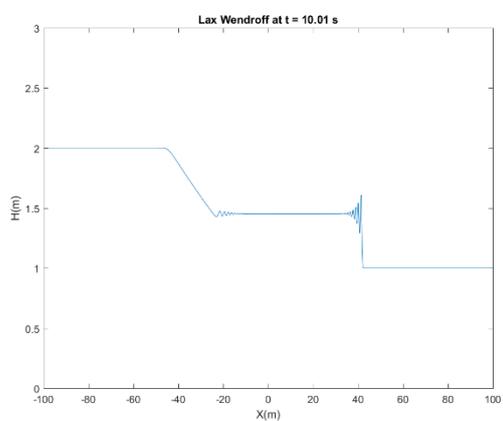
Gambar 4.4 Simulasi dam break ketika t = 4



Gambar 4.5 Simulasi dam break ketika t = 6



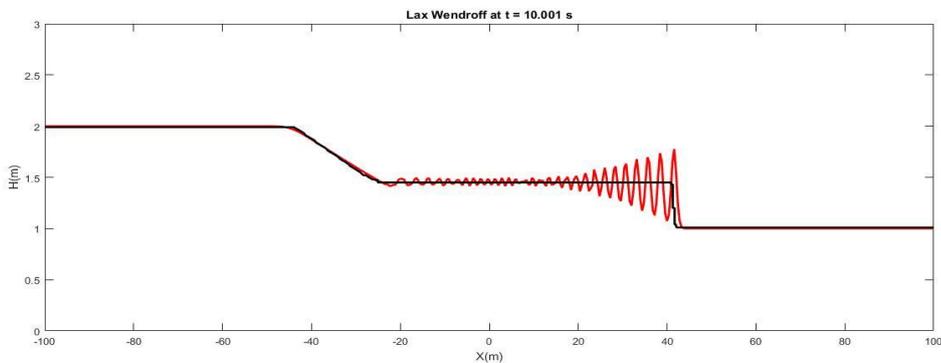
Gambar 4.5 Simulasi dam break ketika t = 8



Gambar 4.6 Simulasi dam break ketika t = 10

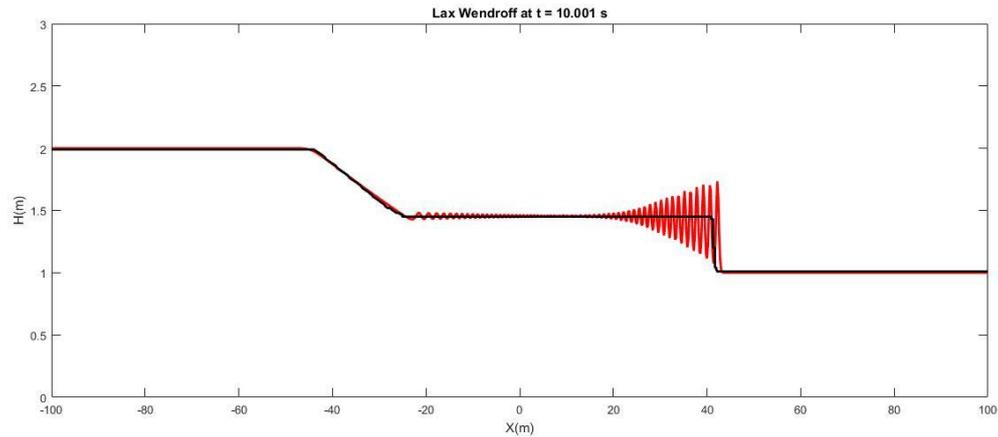
Gambar diatas adalah hasil dari simulasi dam break menggunakan skema Lax-Wendroff dengan selang waktu ± 2 detik, terlihat pada gambar 4.2 posisi dam break ketika t = 0 dengan syarat awal yang digunakan adalah $H_0 = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ dengan Tmax = 10 s. Selang 2 detik dilihat pada gambar 4.3 ketika simulasi sedang berjalan muncul numerical dispersion yang membuat simulasi dam break tidak cukup bagus. Dan pada akhir simulasi dapat dilihat pada gambar 4.6 yang dimana numerical dispersion tersebut berada pada titik -20 sampai dengan 40.

4.2 Analisis Hasil Pengujian Dengan Mengganti Δx untuk Menghitung Error



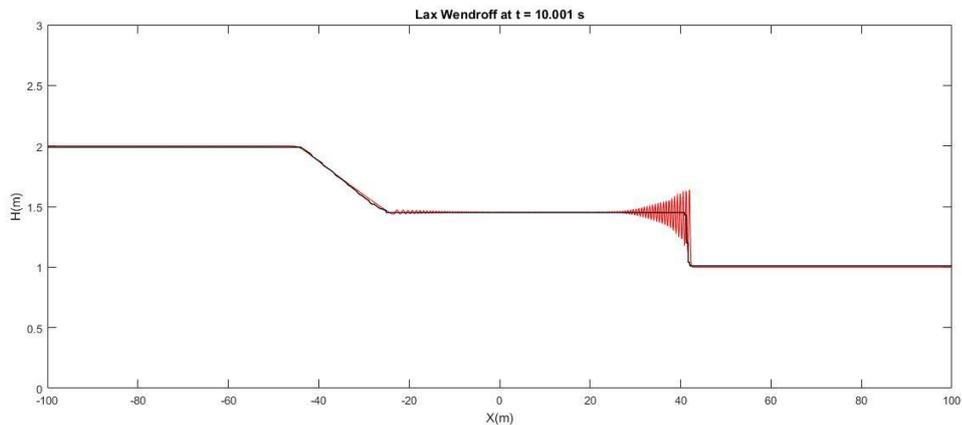
Gambar 4.7 simulasi dam break menggunakan $\Delta x = 0.4$

Pada gambar 4.7 terlihat komparasi antara solusi analitik dengan solusi numerik menggunakan parameter sebagai berikut n = 501, $\Delta t = 0.001$ s, $\Delta x = 0.4$ m. Terlihat numerical dispersion yang muncul pada simulasi tersebut cukup besar, dikarenakan titik (n) yang digunakan pada simulasi tersebut tidak terlalu banyak.



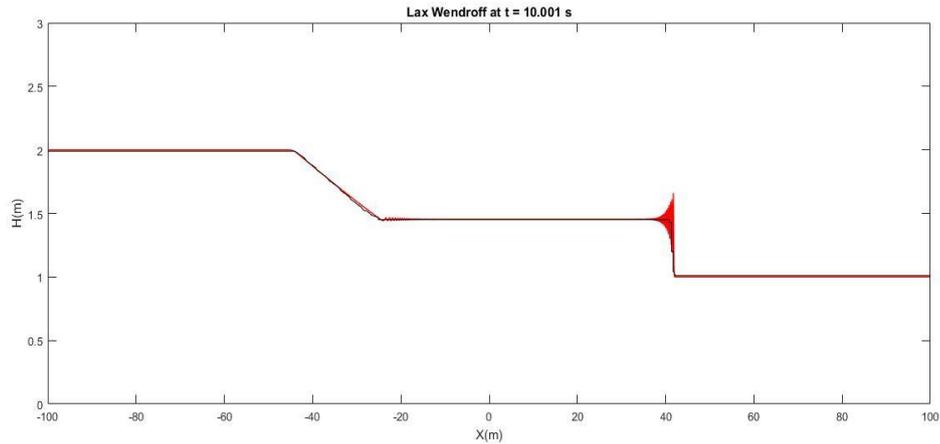
Gambar 4.8 simulasi *dam break* menggunakan $\Delta x = 0.2$

Pada gambar 4.8 terlihat komparasi antara solusi analitik dengan solusi numerik menggunakan parameter sebagai berikut $n = 1001$, $\Delta t = 0.001$ s, $\Delta x = 0.2$ m. Terlihat *numerical dispersion* yang muncul pada simulasi tersebut masih terlihat besar, tetapi tidak seperti gambar sebelumnya, diberikan penambahan 500 titik (n) lebih banyak dari simulasi sebelumnya



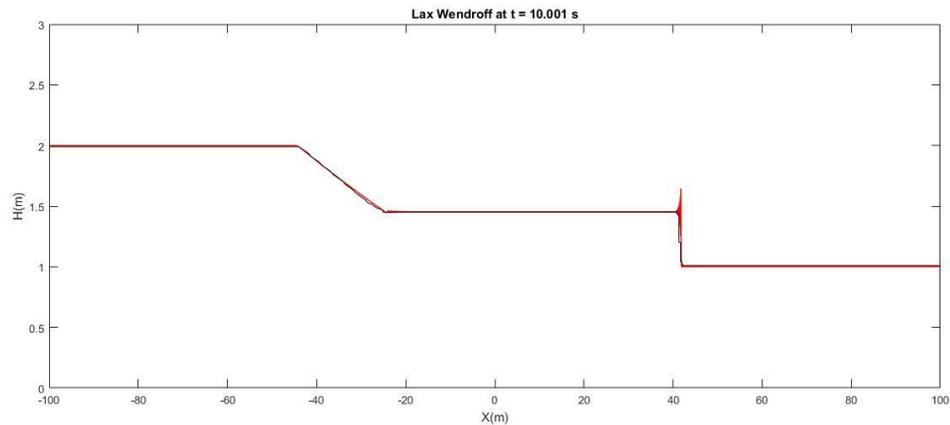
Gambar 4.9 simulasi *dam break* menggunakan $\Delta x = 0.1$

Pada gambar 4.9 terlihat komparasi antara solusi analitik dengan solusi numerik menggunakan parameter sebagai berikut $n = 2001$, $\Delta t = 0.001$ s, $\Delta x = 0.1$ m. dimana *numerical dispersion* yang muncul pada simulasi tersebut sudah mulai mengecil dibandingkan dengan gambar sebelumnya, dan pada simulasi tersebut diberikan penambahan 1000 titik (n) lebih banyak dari simulasi sebelumnya.



Gambar 4.10 simulasi *dam break* menggunakan $\Delta x = 0.05$

Pada gambar 4.10 terlihat komparasi antara solusi analitik dengan solusi numerik menggunakan parameter sebagai berikut $n = 4001$, $\Delta t = 0.001$ s, $\Delta x = 0.05$ m. dimana *numerical dispersion* yang muncul pada simulasi tersebut sudah sangat kecil dibandingkan dengan gambar-gambar sebelumnya, dikarenakan ditambahnya 2000 titik (n) lebih banyak dari simulasi sebelumnya



Gambar 4.11 simulasi *dam break* menggunakan $\Delta x = 0.025$

Pada gambar 4.11 terlihat komparasi antara solusi analitik dengan solusi numerik menggunakan parameter sebagai berikut $n = 8001$, $\Delta t = 0.001$ s, $\Delta x = 0.025$ m. dimana *numerical dispersion* yang muncul pada simulasi tersebut sudah hampir tidak terlihat dibandingkan dengan gambar-gambar sebelumnya, dikarenakan ditambahnya 4000 titik (n) lebih banyak dari simulasi sebelumnya.

Pada tahap ini akan dilakukan menghitung nilai error menggunakan MSE (*Mean Square Error*) dan RMSE (*Root Mean Square Error*) untuk menghitungnya. Dengan rumus sebagai berikut:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (H_i - \hat{H}_i)^2 \quad (4.1)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (H_i - \hat{H}_i)^2} \quad (4.2)$$

N	Δx	MSE	RMSE
501	0.4	0.212	0.1457
1001	0.2	0.0077	0.0878
2001	0.1	0.0088	0.0940
4001	0.05	0.0070	0.0846
8001	0.025	0.0047	0.0686

Tabel 4.1 nilai *error* hasil komparasi antara solusi numerik dan analitik pada saat $t=10s$

Table di atas memperlihatkan nilai error yang didapat dari hasil komparasi solusi numerik dan analitik dengan mengganti Δx , pada table tersebut terlihat nilai error terbesar ada pada $\Delta x = 0.4$, dan dapat dilihat juga error yang terjadi mulai menurun ketika menggunakan Δx yang lebih kecil.

5. Kesimpulan

Dari hasil simulasi yang sudah dilakukan, didapatkan hasil skema Lax-Wendroff untuk studi kasus *dam break*, dari hasil simulasi tersebut bisa kita lihat terdapat *numerical dispersion* ketika simulasi *dam break* dijalankan. *Numerical dispersion* bisa terjadi dikarenakan metode Lax-Wendroff hanya bisa mendefinisikan daerah kontinu, sedangkan dalam kasus *dam break* terdapat bagian diskontinu yang ditandai dengan patahan. Hasil komparasi tersebut dapat divalidasi dari paper yang sudah dimasukkan ke daftar pustaka [5]. Dengan adanya analisis hasil pengujian dengan mengganti Δx untuk menghitung error pada skema Lax-Wendroff dapat ditarik kesimpulan yang berarti semakin banyak titik yang diberikan akan membuat error dari skema Lax-Wendroff akan semakin kecil.

Daftar Pustaka

- [1] Kamus Besar Bahasa Indonesia, Indonesia, 2008.
- [2] C. L. X. M. T. X. Luo You, "Review of Dam-break Research of Earth-rock Dam," *International Conference on Modern Hydraulic Engineering*, 2012.
- [3] S. R. P. a. I. Magdalena, "Momentum Conservative Schemes for Shallow," *East Asian Journal on Applied Mathematics*, Vols. Vol. 4, No. 2, pp. 152-165, 2014.
- [4] R. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [5] M. S. Justyna Machalinska-Murawska, "Lax-Wendroff and McCormack Schemes for Numerical Simulation of Unsteady Gradually and Rapidly Varied Open Channel Flow," *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, vol. Vol. 60 (2013), 2012-2013.
- [6] S. R. T. Safwandi, "Semi-Implicit Numerical Schema In Shallow Water Equation," *Jurnal Natural Vol.17, No.2*, 2017.
- [7] H. P. Gunawan, "Numerical simulation of shallow water equations and," *General Mathematics [math.GM]. University Paris*, 2016.
- [8] D.-H. Z. a. K. R.H.J. GRIMSHAW, "Generation of solitary waves by transcritical flow over a step," *Loughborough University Institutional Repository*.
- [9] J. Stoker, "Water Waves," *Interscience Publication New York*, 1957.
- [10] S. M. a. I. P. Sari, "Numerical Solution to the Shallow Water Equation Using Explicit and Implicit Scheme," *AIP Conference Proceedings 1746*, 2016.